数理解析研究所講究録
1038 巻 1998 年 57-61

数式処理システムによる非線形計画問題の 3 次元グラフィックス表現について

笠嶋友美 (Tomomi Kasajima)
t_kasaji@sophia.ac.jp
Hamada-Yama 1-28-23 Suginami,Tokyo 168-0065 Japan

1. はじめに

線形計画問題では、モデルの目的関数も制約関数もすべて線形一次式で表される。これに対してこの中の少なくとも一つでも非線形式があれば、「非線形計画問題」の対象となる。条件式には不等式が含まれている場合が多い。可能解の領域と最適解についてのグラフ表現は線形計画法と同様に 2 次元平面で描かれるのが常套的手段である。その利点は目的関数と制約関数の集まりの関係の情報が一つの図形でまとまるからである。

さて目的関数の非線形関数が 2 変数のときには 3 次元曲面を表す。この曲面上に描かれた制約関数の写像も視覚化して、その位置関係からどのような状況のもとで、解が存在するかを 3 次元空間的な見地から調べて見ようというものである。更にこの関係図を z-軸の正の位置から真下に見下ろした図は、従来の 2 次元平面上に目的関数の等高線と共に制約関数を描いて最適解を求める図と一致していることを示す。

2. 目的関数も制約関数もすべて非線形式の例

次の 4 つの制約条件の下で目的関数の最大値を求める非線形計画問題について解の範囲を 3 次元グラフィックスにより検討する。

目的関数：

$$f(x,y)=(x-3)^2(y-4)$$

制約関数：

$$g1(x,y)=4-x^2-y^2+2x\geq 0$$

$$g2(x,y)=5-x^2-y^2\geq 0$$

$$g3(x,y)=4-x^2-y^2+2y\geq 0$$

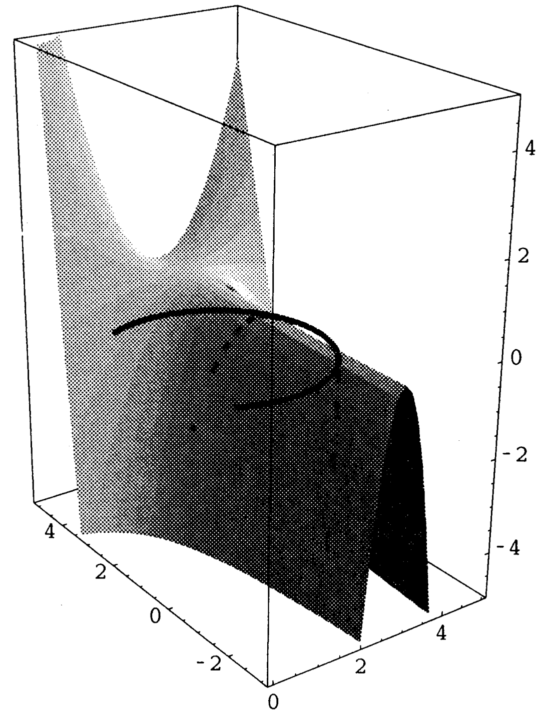
$$x\geq 0$$

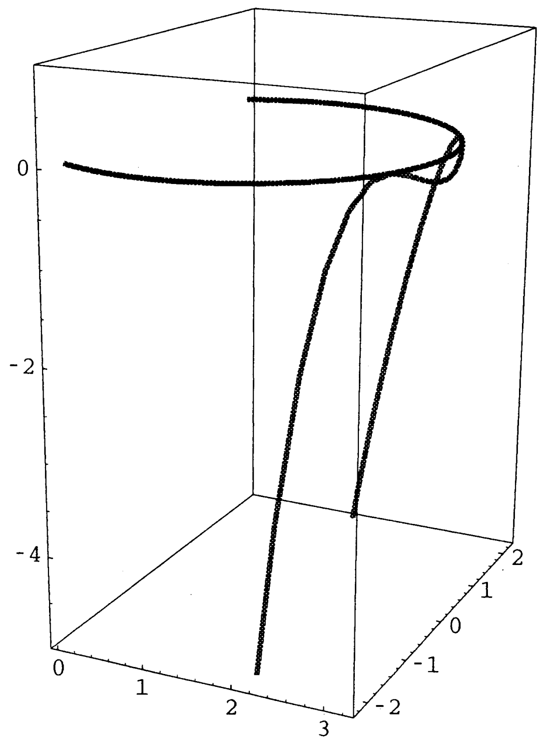
目的関数 $f(x,y)$ は 3 次元空間では曲面 S を表す。解は $z=0$ 平面上の 2 本の直線 $x=3,y=4$ である。

制約関数 $g1, g2, g3$ は 2 変数 x, y の関数であるが $z = 0$ 平面上ではそれぞれ円 R_1, R_2, R_3 である。これらが目的関数の表す曲面 S にそれぞれの制約の下で写像されると、S 上に 3 次元空間曲線 C_1, C_2, C_3 を構成する。

先ず以下に場合に分けて相互間の空間的な位置関係の解釈を示す。

2.1. 目的関数 $f(x, y)$ と制約関数 $g1(x, y)$ の場合





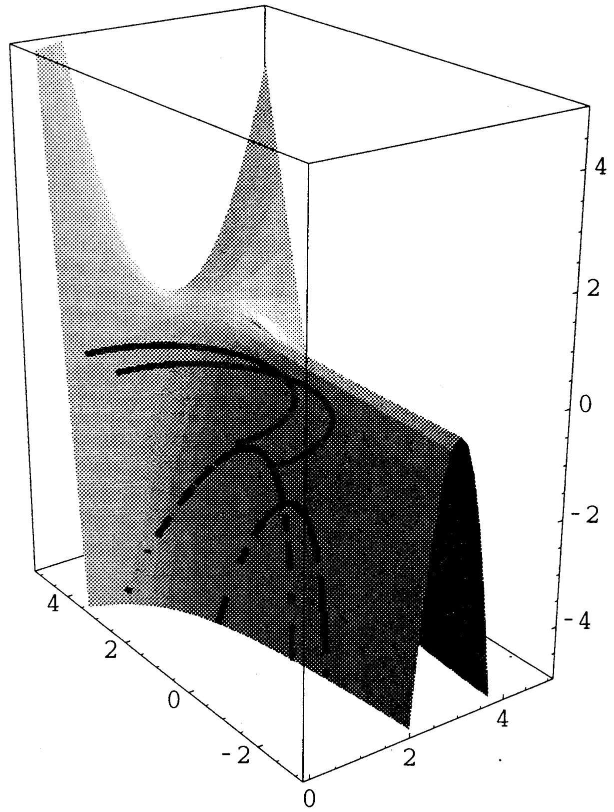
$f(x,y)$ と $g1(x,y)$ の連立方程式の実解は、$P_1(3,1), P_2(3,-1)$ である。すなわち曲面 S の解直線 $x=3$ 上にある。

曲線 C_1 は 曲面 S の解直線 $x=3$ の山の峰 $P_1(3,1)$ を越えると曲面に沿って一時下がりまた 2 番目の解 $P_2(3,-1)$ に達して下降し始める。

もし $f(x,y)$,$g1(x,y)$ のみの条件で最大値を求める問題であるならば、$P_1(3,1), P_2(3,1)$ が求める最大値になる訳であるが、この問題の全体の解決はあと 2 つの制約条件 $g1, g2$ が加わるので $P_1(3,1), P_2(3,-1)$ は最大値の資格を持たなくなる。

2.2. 目的関数 $f(x,y)$ と制約関数 $g1(x,y), g2(x,y)$

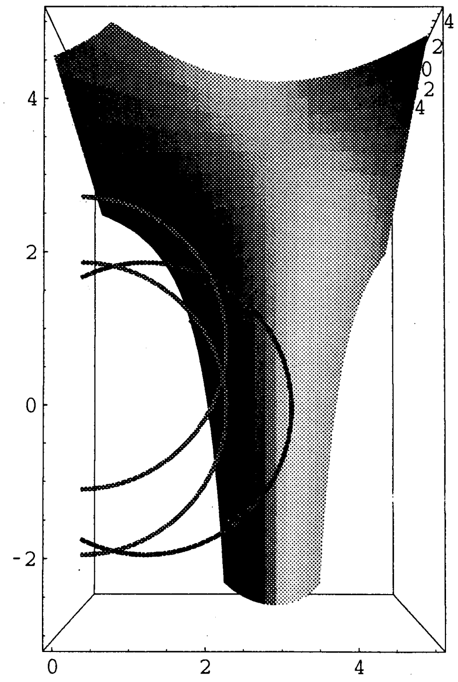
制約関数 $g1(x,y), g2(x,y)$ の下では目的関数 $f(x,y)$ の曲面上に次の 2 つの空間曲線が描かれている。

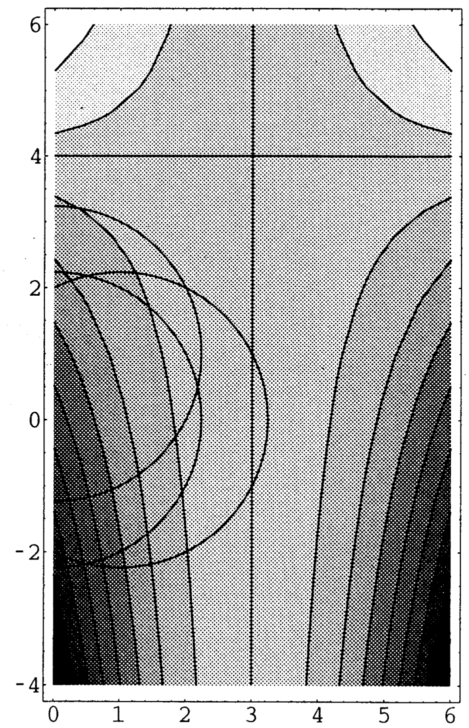


$z=0$ 平面上では隣り合わせになっている 2 つの円も目的関数の曲面に写像されると z-方向の高低の差が生じてくるのが見える。与えられたこれらの制約関数は、すべて曲面の凸の範囲内に写像されている。制約関数の位置によっては目的関数の表す曲面の凸性が失われることが実際に見てとれる。

2.3. z 軸の正方向から真下に見たモデル

側面から見ると、ばらばらな曲線の集まりも、じつは曲面の真上から見ると伝統的に実際よく描かれるグラフと一致する。しかし、このとき曲面上にプロットされた制約関数の数々の空間曲線の特徴はすっかり隠れて専ら与えられた 3 つの円のみがプロットされている（左図）。それは丁度 2 次元平面上に常套的方法で描かれた右図に対応していることになる。





今回は数式処理 Mathematica 3.0 を利用して描画を行なった。本来は美しいカラーで曲面および空間曲線が画面に出現する。上図右の目的関数の等高線プロットは、自動的にグラデーションが現れる。間隔を細かくすることには限界が生ずる。2本の直線 $x = 3, y = 4$ は $f(x, y) = 0$ 解直線で $z = 0$ 平面上にある。

この非線形問題は [1] の3章 Optimization;Nonlinear Programming の中で The gradient-projection Mehtod of Rosen[2] を利用して計算機による数値解析で実行されているが、3次元グラフィックスについては述べられていない。

3. おわりに

視覚化によって、解そのものを求める意図でははないが、条件がどのように動く時、解の挙動の変化が見えてくるので問題の解析の役に立つ。z-軸の上方から真下を見れば $z=0$ 平面上の制約関数の「奥」にさまざまな3次元曲線が展開されているのである。しかしこれらは研究者の脳の中でのみ形成されていて、日の目を浴びていない現状である。

参　考　文　献

[1] Thomas L. Saaty and Joseph Bram, "Nonlinear Mathematics",Dover Publ.Inc., pp 137-141(1981).

[2] J.B.Rosen, "The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming, Part II:Nonlinear Constraints",Shell Development Co., p. 954 (1961)